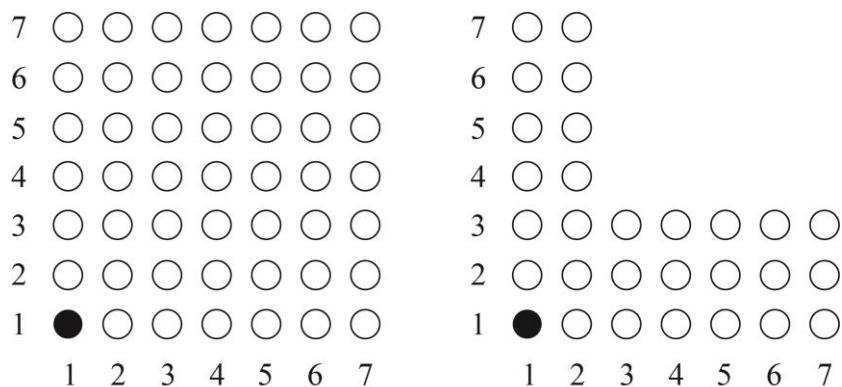


27 戲弄第一象限…抓氣球的遊戲

這裡要介紹的這道遊戲，有人稱它為 Chomp 的遊戲。我是在北一女演講時，想要做發展的學生問我這道遊戲，才知道這道有趣的遊戲。事實上，學生們也是從許介彥教授的一篇文章裡得知 Chomp 這道遊戲。數學概念「對稱」隱藏在這道遊戲裡，希望玩者可以很快的掌握這道「對稱之美」的遊戲。

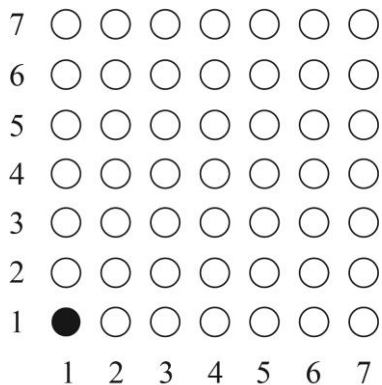
在下圖中，有 1 顆黑色氣球，48 顆白色氣球，當抓住坐標為(3,4)的白色氣球時，此氣球向右及往上區域的白色氣球都會消失，如下圖的右圖所示：



現在讓我們來玩這道抓氣球比賽：

在下圖中，有 1 顆黑色氣球，48 顆白色氣球，甲、乙兩人輪流抓氣球，規則如下：

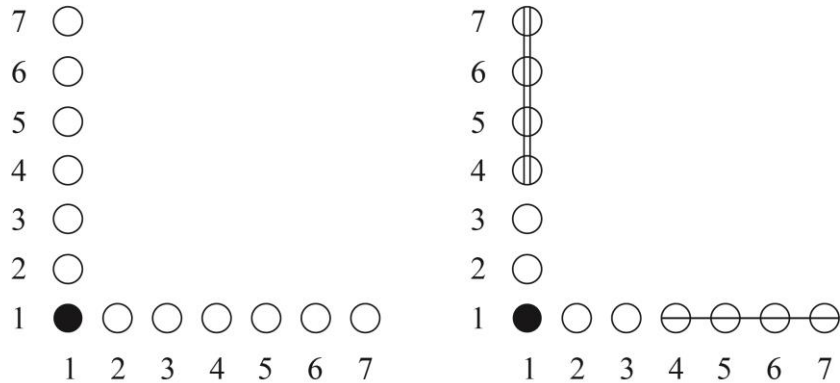
- (1) 每次必須抓台面上還存在的一顆白色氣球。
- (2) 當白色氣球被抓時，此氣球向右及往上區域的白色氣球都會消失。
- (3) 在抓完之後，只剩黑色氣球（即所有白色氣球都消失）的人獲勝。



試問：先抓氣球或者後抓氣球者有必勝的策略，詳述其理由。

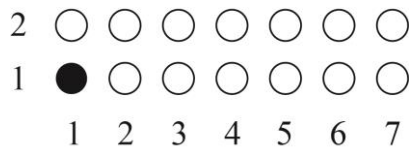
抓氣球遊戲不僅可以在 7×7 的規模上比賽，還可以在 $m \times n$ 的規模上玩，這類遊戲在有限次的抓氣球之後就可以分出勝負，而且不可能平手。這類遊戲的最大特色就是先玩的人可以勝利，有興趣的讀者不妨想想他的原因（原因不容易想到，但卻很妙）。

現在讓我們用圖示來解說為何先抓氣球的甲有必勝的策略？首先甲抓座標為(2,2)的氣球，此時只剩黑色氣球及正向右與正向上的白色氣球，如下圖中的左圖：

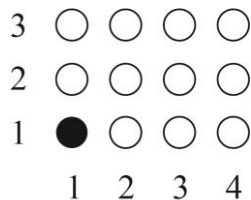


接著輪到乙抓氣球，假設乙抓座標為(4,1)的氣球，那麼使用對稱的技巧，甲只需抓座標為(1,4)的氣球就可以形成如右圖的形狀。接下來甲都採取對稱抓氣球的手法，一定可以抓到最後一顆白色氣球，即甲會獲勝。

如果瞭解了 7×7 規模的抓氣球遊戲，那麼不妨試試看 7×2 規模的情形：



最後再試試 4×3 規模的情形：



我們甚至可以延伸抓氣球遊戲到第一象限上的格子點來比賽，也就是說，在平面座標上，當 x 與 y 都是正整數時，就在座標 (x, y) 上立一個氣球，除了(1,1)立黑色氣球外，其餘都立白色氣球，同樣依抓氣球的規則來玩這道遊戲。雖然此時有無窮多個白色氣球，但是可以在有限次抓氣球之後，讓所有的白色氣球都消失。真的嗎？不妨想想看原因為何？